Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Michele Serra, Sarah Tanja Hess

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2021

Übungen zur Vorlesung Algebraische Zahlentheorie
Blatt 1

Abgabe von: Mein Name
TutorIn: Mein(e) Lieblingstutor(in)

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung werden alle Resultate bis einschließlich Vorlesung 15 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 1.1 **[1+1+1+1 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie die folgenden Normen:

(i) $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}}\left(\sqrt{3}\right)$

(ii) $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})/\mathbb{Q}}\left(\sqrt{3}\right)$

(b) Bestimmen Sie die folgenden Spuren:

(i) $\mathrm{Sp}_{\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}}\left(\sqrt{3}\right)$

(ii) $\mathrm{Sp}_{\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})/\mathbb{Q}}\left(\sqrt{3}\right)$

Lösung:

Aufgabe 1.2 **[1+2+1 Punkte]**

Sei γ eine Nullstelle des irreduziblen Polynoms $f(x) := x^3 - x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ in einer geeigneten Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$.

(a) Bestimmen Sie die $\mathbb{Q}(\gamma)/\mathbb{Q}$-Spuren von 1 und γ.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Matrixdarstellung der Multiplikation mit γ^2 bezüglich der Basis $\{1, \gamma, \gamma^2\}$ die $\mathbb{Q}(\gamma)/\mathbb{Q}$-Spur von γ^2.

(c) Ermitteln Sie für beliebig aber feste $a, b, c \in \mathbb{Q}$ die $\mathbb{Q}(\gamma)/\mathbb{Q}$-Spur von $a + b\gamma + c\gamma^2$.

Lösung:

Aufgabe 1.3 **[1+1+1+1 Punkte]**

Sei K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum ($n \in \mathbb{N}$), $B\colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform und betrachten Sie für beliebig aber festes $x \in V$ die Linearform

$$\begin{aligned} B_x\colon V &\to K \\ y &\mapsto B_x(y) := B(x,y). \end{aligned}$$

Die Bilinearform B ist *nicht-ausgeartet*, falls für alle $x \in V\backslash\{0\}$ stets $B_x \not\equiv 0$ gilt. Ist dies nicht der Fall, so ist B *ausgeartet*.

(a) Zeigen Sie, dass B genau dann nicht-ausgeartet ist, wenn für alle Matrix-Darstellungen $\mathbb{B}$ von B bereits $\det(\mathbb{B}) \neq 0$ gilt.

Betrachten Sie nun die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_B\colon V &\to V^* \\ x &\mapsto B_x. \end{aligned}$$

(b) Beweisen Sie, dass B genau dann nicht-ausgeartet ist, wenn $\ker(\varphi_B) = \{0\}$ erfüllt ist und folgern Sie, dass B genau dann nicht-ausgeartet ist, wenn φ_B ein Isomorphismus ist.

Sei B von nun an nicht-ausgeartet, $\mathcal{B} := \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $w_j := \varphi_B^{-1}(v_j^*) \in V$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Bemerken Sie, dass $\{w_1, \ldots, w_n\}$ eine Basis, die zu $\mathcal{B}$ *B-duale Basis*, von V ist.

(c) Beweisen Sie für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ die Kronecker-Delta-Beziehung $B(v_i, w_j) = \delta_{ij}$.

(d) Zeigen Sie, dass die zu $\mathcal{B}$ B-duale Basis für alle $v \in V$ mit $v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ ($c_1, \ldots, c_n \in K$) und alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ bereits $c_j = B(v, w_j)$ erfüllt.

Lösung:

Aufgabe 1.4* **[1+1+2 Punkte]**

(a) Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, A eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus K und betrachten Sie das charakteristische Polynom $\mathrm{CharPol}(A) := \det(xI_n - A) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0 \in K[x]$ von A. Beweisen Sie die folgenden Beziehungen:

(i) $b_0 = (-1)^n \det(A)$

(ii) $b_{n-1} = -\mathrm{Spur}(A)$.

(b) Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} B_{L/K}\colon L \times L &\to K \\ (x,y) &\mapsto \mathrm{Sp}_{L/K}(xy) \end{aligned}$$

eine symmetrische Bilinearform ist.

Lösung:

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 24. Juni 2021, um 10:00 Uhr**, direkt an den Tutor / die Tutorin. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.